Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

Soluţii şi bareme orientative pentru clasa a VIII-a

Problema 1. Pe planul triunghiului ABC dreptunghic în A ridicăm perpendicularele din punctele A şi B, de aceeaşi parte a planului, pe care considerăm punctele M şi N astfel încât $BN < AM$. Ştiind că $AC = 2a, AB = a\sqrt{3}, AM = a$ şi că planul MNC face cu planul ABC un unghi de $30°$, să se afle

a) aria triunghiului MNC;

b) distanţa de la punctul B la planul MNC.

Soluţie. a) Aria triunghiului ABC este $a^2 \cdot \sqrt{3}$. Cum M, N, C se proiectează pe planul ABC în punctele A, B, C rezultă că aria$[ABC]$=aria$[MNC] \cdot \cos\alpha$, unde $\alpha = 30°$ este unghiul planelor MNC şi ABC. .... 2 puncte

Obţinem că aria$[MNC] = 2 \cdot a^2$. .... 1 punct

b) Fie P intersecţia dreptelor MN şi AB. Proiectăm A pe PC în punctul T. Conform teoremei celor trei perpendiculare, avem $MT \perp PC$, deci $\angle MTA = \alpha = 30°$. .... 1 punct

Deoarece $AB = a$, în triunghiul MAT găsim $AT = a\sqrt{3}$, deci $\angle ACT = 60°$ de unde $AP = 2a\sqrt{3}$. Rezultă că B este mijlocul segmentului AP...1 punct

Proiectăm B pe PC în punctul Q. Conform teoremei celor trei perpendiculare, avem $NQ \perp PC$. Atunci $BN = \frac{a}{2}, BQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, NQ = a$ şi înălţimea BS a triunghiului dreptunghic BNQ este $\frac{BN \cdot BQ}{NQ} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Aceasta este distanţa căutată. ....2 puncte

Problema 2. Pentru un număr natural n, notăm cu $u(n)$ cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu n şi $v(n)$ cel mai mic număr prim mai mare decât n. Să se arate că

$$\frac{1}{u(2)v(2)} + \frac{1}{u(3)v(3)} + \frac{1}{u(4)v(4)} + \cdots + \frac{1}{u(2010)v(2010)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}.$$

Soluţie.

Dacă p şi q sunt numere prime consecutive, notăm $A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid p \leq n < q\}$. Se observă că A_p are $q - p$ elemente şi, pentru fiecare element n al său, avem $u(n) = p$ şi $v(n) = q$. Cu alte cuvinte, termenul $\frac{1}{p \cdot q}$ apare în sumă de $q - p$ ori .... 4 puncte

Deoarece 2003 şi 2011 sunt numere prime consecutive, suma devine

$$\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2011-2003}{2003\cdot 2011}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2011}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2011}.$$

....3 puncte

Problema 3. Să se arate că există o infinitate de numere iraţionale x şi y cu proprietatea că $x+y=xy\in\mathbb{N}$.

Soluţie.

Fie $n=x+y=xy\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 5$. Atunci $y=n-x$ şi $n=x(n-x)$, deci $x^2-nx+n=0$ ....2 puncte

Obţinem $4x^2-4nx+n^2+4n-n^2=0$, deci $(2x-n)^2=n^2-4n$, de unde $x=\frac{1}{2}\left(n\pm\sqrt{n^2-4n}\right)$ ....2 puncte

Deoarece pentru $n\geq 5$ $(n-3)^2<n^2-4n<(n-2)^2$, rezultă că $\sqrt{n^2-4n}$ este iraţional......................................1 punct

În consecinţă, alegem $x=\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.
....2 puncte

Problema 4. a) Să se arate că vârfurilor unui cub li se pot atribui numerele 1 sau -1 astfel încât produsul numerelor atribuite vârfurilor de pe fiecare faţă să fie egal cu -1.

b) Să se arate că pentru o prismă hexagonală regulată o astfel de atribuire nu este posibilă.

Soluţie.

a) Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub. O etichetare în condiţiile problemei este următoarea: vârfurilor A,B,D,A' li se atribuie $+1$, iar celorlalte -1. ....2 puncte

b) Fie prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Presupunem că există o atribuire în condiţiile problemei. În acest caz produsul celor 12 numere este 1, fiind egal cu pătratul produsului numerelor din vârfurile fiecărei baze................................2 puncte

Pe de altă parte, considerăm feţele $ABB'A'$, $CDD'C'$ şi $EFF'E'$. Reuniunea vârfurilor acestor feţe este egală cu mulţimea vârfurilor prismei. În acest caz produsul numerelor atribuite vârfurilor prismei este $(-1)^3=-1$, contradicţie. ....3 puncte